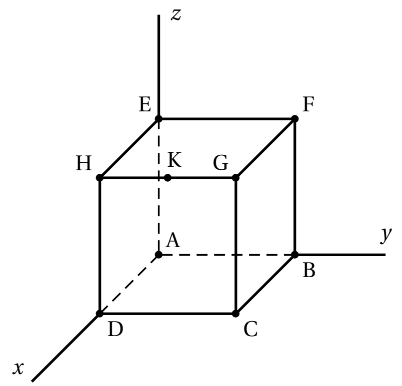
EXERCICE 1 5 points

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1 représenté ci-contre.
On note K le milieu du segment [HG].
On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right)$.



1. Les points C, F et K définissent un plan si et seulement si ils ne sont pas alignés.

- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$ donc le point C a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.
- $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ donc le point F a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.
- $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ donc le point H a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

  $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ donc le point G a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

  K est le milieu de [HG] donc il a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{x_H+x_G}{2}\\\frac{y_H+y_G}{2}\\\frac{z_H+z_G}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1+1}{2}\\\frac{0+1}{2}\\\frac{1+1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CK}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix}x_F - x_C\\y_F - y_C\\z_F - z_C\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x_K - x_C\\y_K - y_C\\z_K - z_C\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CK}$ ne sont pas colinéaires donc les points C, F et K ne sont pas alignés, et donc ces trois points définissent un plan.

2. **a.** $KG = \frac{1}{2}$, $GF = 1$ et $GC = 1$.

b. Le triangle FGC est rectangle en G donc son aire vaut en unités d'aire :
$\mathscr{A} = \dfrac{GF \times GC}{2} = \dfrac{1}{2}$.

c. Le tétraèdre FGCK a pour base le triangle FGC et pour hauteur KG donc son volume vaut, en unité de volume : $\dfrac{1}{3} \times \mathscr{A} \times \text{KG} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{12}$.

3. **a.** On note $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

- $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{CF}} = 1 \times (-1) + 2 \times 0 + 1 \times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{\text{CF}}$.
- $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{CK}} = 1 \times 0 + 2 \times (-\frac{1}{2}) + 1 \times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{\text{CK}}$.

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (CFK) donc c'est un vecteur normal au plan (CFK).

b. Le plan (CFK) est l'ensemble des points M de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tels que $\overrightarrow{\text{CM}}$ et $\overrightarrow{n}$ soient orthogonaux, c'est-à-dire tels que $\overrightarrow{\text{CM}} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.

$\overrightarrow{\text{CM}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{CM}} \cdot \overrightarrow{n} = 0 &\iff (x-1) \times 1 + (y-1) \times 2 + z \times 1 = 0\\ &\iff x - 1 + 2y - 2 + z = 0 \iff x + 2y + z - 3 = 0\end{aligned}$$

Le plan (CFK) a donc pour équation cartésienne $x + 2y + z - 3 = 0$.

4. On note Δ la droite passant par le point G et orthogonale au plan (CFK).

La droite Δ est orthogonale au plan (CFK) donc elle a $\overrightarrow{n}$ pour vecteur directeur. De plus, elle passe par le point G de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Donc la droite Δ est l'ensemble des points M de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tels que $\overrightarrow{\text{GM}}$ et $\overrightarrow{n}$ soient colinéaires, autrement dit tels que $\overrightarrow{\text{GM}} = t \cdot \overrightarrow{n}$ où $t \in \mathbb{R}$.

$\overrightarrow{\text{GM}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-1\end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{\text{GM}} = t \cdot \overrightarrow{n} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& t \times 1\\ y-1 &=& t \times 2\\ z-1 &=& t \times 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+t\\ y &=& 1+2t\\ z &=& 1+t\end{array}\right.$$

Donc la droite Δ a pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+t\\ y &=& 1+2t\\ z &=& 1+t\end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$.

5. Soit L le point d'intersection entre la droite Δ et le plan (CFK).

a. Les coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ du point L sont solutions du système $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+t\\ y &=& 1+2t\\ z &=& 1+t\\ x+2y+z-3 &=& 0\end{array}\right.$.

On a donc : $(1+t)+2(1+2t)+(1+t)-3=0$ soit $1+t+2+4t+1+t-3=0$, ou encore $6t+1=0$, soit $t=-\frac{1}{6}$.

Le point L a donc pour coordonnées : $\left\{\begin{array}{lllll} x &=& 1+t &=& 1-\frac{1}{6} &=& \frac{5}{6}\\ y &=& 1+2t &=& 1-\frac{2}{6} &=& \frac{2}{3}\\ z &=& 1+t &=& 1-\frac{1}{6} &=& \frac{5}{6}\end{array}\right.$

b. $\text{LG}=\sqrt{(x_{\text{G}}-x_{\text{L}})^2+\left(y_{\text{G}}-y_{\text{L}}\right)^2+(z_{\text{G}}-z_{\text{L}})^2}=\sqrt{\left(1-\dfrac{5}{6}\right)^2+\left(1-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(1-\dfrac{5}{6}\right)^2}$

$=\sqrt{\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{36}}=\sqrt{\dfrac{6}{36}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

6. Le tétraèdre FGCK a pour base le triangle CFK d'aire $\mathcal{B}$, et pour hauteur LG.

Son volume vaut donc : $\dfrac{1}{3}\times\mathcal{B}\times\text{LG}$. Ce volume vaut $\dfrac{1}{12}$ donc on a :

$\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{3}\times\mathcal{B}\times\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ donc $\dfrac{1}{12}=\dfrac{\sqrt{6}}{18}\times\mathcal{B}$ donc $\dfrac{18}{12\sqrt{6}}=\mathcal{B}$ donc $\mathcal{B}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

L'aire du triangle CFK est, en unité d'aire : $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.